ÜBER

GRÖSSE UND LAGE

INSBESONDERE ÜBER

SYMPTOSE VON BILD UND OBJECT

BEI

LINSEN UND LINSENSYSTEMEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

AN DER

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

VON

H SCHWANEFELD,

COLLABORATOR AM DOMGYMNASIUM ZU VERDEN.

GÖTTINGEN,

DRUCK DER UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON E. A. HUTH.

1868.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544702_0127

In den Lehrbüchern der Physik, welche heutzutage an Gymnasien und Realschulen gebraucht werden, findet man in dem Capitel über Dioptrik noch immer jene seit fast dreissig Jahren veralteten Ansichten über den Gang der Lichtstrahlen durch sphärisch begrenzte, brechende Medien. Die einzige Abhandlung, welche diesen Gegenstand in elementarer, für die obersten Classen der Gymnasien und Realschulen fasslicher Weise behandelt, ist jene von Neumann: „Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems.“ Allein in derselben werden nur die Haupt- und Brennpunkte entwickelt und beiläufig die Knotenpunkte erwähnt. Da nun die bei Linsen und Linsensystemen bestehende Relation für die conjugirten Vereinigungsweiten bereits in jener Abhandlung erörtert ist, so wird dieselbe bei vorliegender Arbeit als bekannt vorausgesetzt, und sind in dem ersten Theile nach Einschaltung der nöthigen Definitionen ausser den Brenn- und Hauptpunkten noch die Knoten- und Nebenpunkte entwickelt, sowie alle späterhin zur Anwendung kommenden Sätze. In einem zweiten Theile wird das Zusammenfallen von Bild und Object behandelt, wobei vom allgemeineren Falle ausgegangen wird. Im dritten Theil ist sodann die Frage erörtert, welchen Einfluss auf Vergrösserung, Lage und Deutlichkeit des Bildes die Verschiebung einer Linse oder eines Linsensystems zwischen dem Auge und einem Gegenstande hat. Schliesslich wird noch eine Bestimmung der Brennweite und des Interstitiums auf experimentellem Wege gegeben.

Als Literatur ist zu nennen:

Gauss, Dioptrische Untersuchungen.
Möbius, Berichte der kön. sächs. Gesellschaft der W. math. phys. Classe 1855.
A. Weiss, Elemente der analytischen Dioptrik.
Neumann, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems.
Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik.
„ Dioptrik des Auges.
Listing, Ueber einige merkwürdige Punkte in Linsen und Linsensystemen.
Amtlicher Bericht der 31. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte zu Göttingen.

Möge denn diese Abhandlung, die zunächst für die obersten Classen von Gymnasien und Realschulen bestimmt ist, im Anschluss an jene von Neumann, dazu beitragen, über den erwähnten Theil der Dioptrik bereits auf Schulen richtige Ansichten zu verbreiten, zumal da, wie der Verfasser glaubt gezeigt zu haben, sich dieselben in sehr einfacher Form zur Anschauung bringen lassen.

I.

Wenn man mit p die Entfernung eines Gegenstandes vom ersten (Gauss'schen) Hauptpunkte, mit p' den Abstand des Bildes vom zweiten und mit f und f' die Brennweiten einer Linse oder eines Linsensystems bezeichnet, so besteht bekanntlich für den Fall, dass die extremen Medien ungleiche Brechungsindices haben, zwischen jenen Grössen die Beziehung

$$(p-f)\,(p'-f') = ff',$$

woraus sich dann als besonderer Fall für gleiche extreme Medien die Relation ergibt

$$(p-f)\,(p'-f) = f^2.$$

Die Bedingungen für die Existenz jener Gleichungen sind die, dass homogenes Licht, d. h. Strahlen von gleicher Brechbarkeit, zur Anwendung kommt, und die Linse nur von centralen Strahlen getroffen wird, welche kleine Winkel mit der Axe bilden. Linsen wie Linsensysteme werden als sphärisch begrenzte, brechende Medien angesehen, deren Flächen centrirt sind, d. h. deren Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen. Licht, welches von einem Punkte ausgeht (homocentrisches Licht), vereinigt sich nach dem Durchgange wieder in einen Punkt; zwei Punkte solcher Eigenschaft heissen conjugirte Vereinigungspunkte. Ein leuchtender Punkt der Axe, welcher in unendlicher Entfernung liegt, der also paralleles Licht auf die Linse wirft, hat seinen conjugirten Vereinigungspunkt im Brennpunkte; andererseits ist nach dem Princip der Revertibilität des Lichtes unter Brennpunkt auch derjenige Punkt zu verstehen, von dem Licht ausgehen muss, wenn es nach dem

Durchgange parallel sein soll. Jede Linse, ja sogar jede brechende Fläche hat somit zwei Brennpunkte. Die Entfernung der Brennpunkte von den zugehörigen (Gauss'schen) Hauptpunkten sind die Brennweiten f und f'. Dieselben verhalten sich ihrer Grösse nach zu einander, wie die Brechungsindices der Medien, in denen sie liegen, einerlei, welche Mittel sich dazwischen befinden. Es werden somit die beiden Brennweiten gleich, wenn die extremen Medien gleich sind, z. B. vor und hinter der Linse sei Luft, und es geht eben in Folge dessen die Gleichung

$$(p-f)\ (p'-f') = ff'$$

über in

$$(p-f)\ (p'-f) = f^2.$$

Die Brennweiten sind positiv, wenn im Sinne des einfallenden Lichtes der erste Brennpunkt vor dem ersten Hauptpunkt, der zweite hinter dem zweiten Hauptpunkt liegt, welcher Fall bei Collectivlinsen eintritt; negativ dagegen, wenn das Umgekehrte stattfindet, wie bei Dispansivlinsen. Die Entfernung der Hauptpunkte von einander, das Interstitium ε, ist positiv, wenn bei einfallendem Lichte der erste Hauptpunkt vor dem zweiten liegt; negativ bei entgegengesetzter Lage. In gleicher Weise wie die Brennweiten werden von den Hauptpunkten aus auch die conjugirten Vereinigungsweiten gerechnet und soll unter $+p$ die Entfernung des Gegenstandes vor dem ersten, unter $+p'$ die des Bildes hinter dem zweiten Hauptpunkte verstanden werden.

Sind nun F und F' die beiden Brennpunkte, E und E' die beiden Hauptpunkte und befindet sich in P' das Bild eines Objectes in P, so ergibt sich aus der Definition für die Brennpunkte mittelst der Construction Fig. 1 leicht das Grössenverhältniss von Bild $= b$ und Object $= g$. Es ist nämlich

$$\frac{f}{p-f} = \frac{b}{g} = \frac{p'-f'}{f'}$$

und da sich aus der Relation ergibt, dass

$$p' - f' = \frac{p'f}{p},$$

so erhält man, wenn die Vergrösserungszahl

$$m = \frac{b}{g}$$

bei gleicher Lage von Bild und Object zur Axe als positiv, bei entgegengesetzter als negativ genommen wird, für

$$m = -\frac{f}{p-f} = -\frac{p'-f'}{f'} = -\frac{p'f}{pf'}.$$

Bei gleichen extremen Medien verwandelt sich der obige Ausdruck in

$$m = -\frac{f}{p-f} = -\frac{p'-f}{f} = -\frac{p'}{p}.$$

Mit Hülfe dieser Sätze lassen sich nun leicht diejenigen conjugirten Vereinigungspunkte auffinden, welche besondere Eigenschaften besitzen und eben deshalb den Namen Cardinalpunkte erhalten haben.

Für $m = +1$ oder

$$-\frac{f}{p-f} = 1 \quad \text{d. h.}$$

$$p = 0$$

geht die Bedingungsgleichung

$$(p-f)\ (p'-f') = ff'$$

über in $p' = 0.$

Da nun die conjugirten Vereinigungsweiten von den Hauptpunkten aus gerechnet werden, so folgt, dass jene Punkte, für welche $p = 0$ und $p' = 0$ ist, die Hauptpunkte selbst sein müssen. Von einem Gegenstande im ersten Hauptpunkte würde also ein eben so grosses, aufrechtes (congruentes) Bild im zweiten Hauptpunkte entstehen, und dies gerade ist die Definition für die Hauptpunkte.

Es sei $m = -1$ oder

$$-\frac{f}{p-f} = -1,$$ so ist einerseits

$$p = 2f$$ und aus

$$(p-f)\,(p'-f') = ff'$$ ergibt sich andererseits $p' = 2f'$.

Für gleiche extreme Medien wird dann

$$p = p' = 2f$$

und es haben nun diese beiden Punkte ausser der Eigenschaft, dass ein aufrechter Gegenstand im ersten ein umgekehrtes, gleiches Bild im zweiten liefert, noch eine andere Bedeutung, worauf im Folgenden hingewiesen werden soll.

Zwei andere Paare conjugirter Vereinigungspunkte ebenfalls von besonderen Eigenschaften erhält man, wenn

$$p = f \pm f'$$

genommen wird. Da

$$p' = \frac{pf'}{p-f}$$ ist,

so wird für $p = f + f'$

auch $p' = f + f'$.

Es ist also $p = p'$.

Dagegen ist für $p = f - f'$

$p' = f' - f$,

also $p = -p'$.

In beiden Fällen sind die conjugirten Vereinigungsweiten ihrem absoluten Werthe nach gleich; da im ersten Falle auch die Vorzeichen gleich sind, so liegen sie symmetrisch zu den Hauptpunkten. Diese beiden Punkte, welche um die Summe der Brennweiten von den Hauptpunkten abstehen, sind von Herr Prof. Listing [1]) als accessorische oder Nebenpunkte bezeichnet worden. Im zweiten Falle,

---

[1]) Amtlicher Bericht der 31. Vers. Deutscher Naturforscher u. Aerzte zu Göttingen 1860. Seite 47.

wo die conjugirten Vereinigungsweiten ungleiche Vorzeichen haben, liegen die zugehörigen Vereinigungspunkte auf derselben Seite der Hauptpunkte, entweder beide um die Differenz der Brennweiten vor oder hinter den Hauptpunkten. Dieselben haben den Namen Knotenpunkte erhalten. Es leuchtet ein, dass die Entfernung der Knotenpunkte von einander dem Abstand des zweiten Hauptpunktes vom ersten, also dem Interstitium ε gleich sein muss.

Die Vergrösserungszahl $m = -\frac{p' f}{p f'}$

ist für die Knotenpunkte $m = \frac{f}{f'}$

und für die Nebenpunkte $m = -\frac{f}{f'}$.

Im zweiten Knotenpunkte liegt also ein aufrechtes Bild von einem Gegenstande, der sich im ersten befindet, und die Vergrösserungszahl ist umgekehrt proportional dem Verhältniss der Brennweiten. Im zweiten Nebenpunkte dagegen entsteht ein umgekehrtes Bild von einem Objecte, welches im ersten liegt; das Grössenverhältniss ist dasselbe, wie bei den Knotenpunkten.

Bei gleichen extremen Medien fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen, da nämlich

$$f = f' \text{ ist,}$$

so muss

$$p = f - f' = 0$$

$$p' = f' - f = 0 \text{ und}$$

$$m = \frac{f}{f'} = +1 \text{ sein.}$$

Die Nebenpunkte dagegen sind identisch mit den beiden conjugirten Vereinigungspunkten, für welche

$$m = -1$$

ist; denn für $f = f'$ wird

$$p = f + f' = 2f,$$

$$p' = f + f' = 2f \text{ und}$$

$$m = -\frac{f}{f'} = -1.$$

Diese vier Paare so besonders ausgezeichneter Punkte, die Haupt-, Brenn-, Knoten- und Nebenpunkte sind die Cardinalpunkte eines Linsensystems; sind zwei Paare derselben gegeben, so lassen sich die andern vermittelst der obigen Bestimmungen leicht finden.

Bezüglich der Richtung derjenigen Lichtstrahlen, welche durch die Knoten- und Nebenpunkte gehen, zeigen sich ähnlich, wie bei den Brennpunkten, noch einige merkwürdige Eigenschaften, welche bei gegebenem Objectpunkte zur Construction des Bildpunktes wohl geeignet sind. Im Vorstehenden wurden die conjugirten Vereinigungsweiten bis zu den Hauptpunkten gezählt; rechnet man sie jetzt bis zu den Knotenpunkten und bezeichnet sie dann mit q und q', so ist

$$q = p - (f - f') \quad \text{und} \quad q' = p' - (f' - f)$$
$$q - f' = p - f \qquad q' - f = p' - f'.$$

Setzt man diese Ausdrücke dann in

$$m = \frac{b}{g} = -\frac{f}{p-f} = -\frac{p'-f'}{f'} \text{ ein,}$$

so findet man, dass

$$\frac{b}{g} = -\frac{f}{q-f'} \quad \text{und} \quad \frac{b}{g} = -\frac{q'-f}{f'},$$

woraus $q = \frac{bf' - fg}{b}$ und $q' = \frac{fg - bf'}{g}$,

also $\frac{q'}{q} = -\frac{b}{g}$ folgt.

Das umgekehrte Bild verhält sich zum Gegenstande, wie die auf die Knotenpunkte bezogenen Bild- und Objectweiten sich zu einander verhalten; es leuchtet somit ein, dass einem vom Objecte ausgehenden, durch den ersten Knotenpunkt gelegten Strahl ein paralleler, durch den zweiten Knotenpunkt verlaufender entsprechen muss.

Aehnlich verhält es sich mit den Nebenpunkten. Ist der Abstand eines Objectes vom ersten Nebenpunkt = r, des Bildes vom zweiten = r', so ist

$$p + r = f + f' \quad \text{und} \quad p' + r' = f + f'$$
$$p - f = f' - r \quad \text{und} \quad p' - f' = f - r'.$$

Substituirt man diese Werthe wieder in

$$\frac{b}{g} = -\frac{f}{p-f} = -\frac{p'-f'}{f'},$$

so dass $\frac{b}{g} = -\frac{f}{f'-r}$ und $\frac{b}{g} = -\frac{f-r'}{f'}$ ist, so ergibt sich daraus

$$r = \frac{bf' + fg}{b} \quad \text{und} \quad r' = \frac{bf' + fg}{g},$$

also $$\frac{r'}{r} = \frac{b}{g}.$$

Mit Berücksichtigung dessen, was so eben für die Knotenpunkte dargethan ist, folgt, dass bei entgegengesetzter Lage des Bildes zu einem durch den ersten Nebenpunkt gelegten Lichtstrahl ein paralleler, durch den zweiten verlaufender gehören würde; — in Wirklichkeit also entspricht einem Lichtstrahl durch den ersten Nebenpunkt ein symmetrischer Lichtstrahl durch den zweiten, welcher einen gleichen Winkel mit der Axe bildet.

Bei gegebener Objectweite lässt sich nun mittelst der bereits mehrfach erwähnten Relation die Bildweite auch leicht durch Construction finden. Bekanntlich ist die Gleichung der Hyperbel bezogen auf ihre Asymptoten

$$xy = {}^1/_4 (a^2 + b^2),$$

wobei ${}^1/_4 (a^2 + b^2)$ nichts anderes ist, als das Product der auf die Asymptoten bezogenen gleichen Coordinaten des Scheitels. Setzt man ${}^1/_4 (a^2 + b^2) = ff'$.
so geht die Gleichung über in $xy = ff'$.

Nimmt man noch eine Verschiebung des Coordinatenanfangs in der Weise zu Hülfe, dass man

$$x = p - f$$
$$y = p' - f' \quad \text{setzt, so ist}$$
$$(p - f)(p' - f') = ff',$$

wobei nun p und p' die Coordinaten für das neue System sind. Für gleiche extreme Medien ergibt sich, dass der Anfangspunkt des neuen Systems mit dem Scheitel des andern Hyperbelzweiges zusammenfällt. Die Construction (Fig. 2) hat indessen keinen weiteren Werth, als dass sie bei gegebenem Abstande des Objectes vom ersten Hauptpunkt, als Abscisse genommen, die conjugirte Vereinigungsweite als Ordinate angibt. Wichtiger dagegen sind die Constructionen, welche zugleich mit dem Ort des Bildes Aufschluss über dessen Grösse gewähren. A. Weiss gibt in seiner Abhandlung „Elemente der analytischen Dioptrik" zwei Constructionen (Fig. 3), die eine für einen Punkt in der Axe, die andere für einen ausserhalb derselben liegenden Gegenstand. In dieser wie in den folgenden Figuren ist

E der erste, E' der zweite Hauptpunkt,
F „ „ F' „ „ Brennpunkt,
D „ „ D' „ „ Knotenpunkt,
G „ „ G' „ „ Nebenpunkt,

P' und $\mathfrak{P}'$ der Bildpunkt, P und $\mathfrak{P}$ der Objectpunkt.

Die Construction, welche einestheils auf der bereits oben angegebenen Eigenschaft der Knotenpunkte beruht, erklärt sich andererseits leicht aus der umgeformten Gleichung

$$\frac{p - f}{f'} = \frac{f}{p' - f'}.$$

Eine andere Construction vermittelst der Nebenpunkte (Fig. 4) ist von Herr Prof. Listing in seiner Mittheilung auf der 31. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in Göttingen (Amtlicher Bericht 1860. Seite 47) angegeben.

Es möge endlich noch eine Construction von Möbius (Berichte der k. sächs. Gesellsch. der W. math.-phys. Classe

1855. Seite 32) angeführt werden, zumal da dieselbe theilweise zur Behandlung der folgenden Untersuchungen Veranlassung gegeben hat. Möbius gibt dieselbe dort nur für gleiche extreme Medien d. h. bei gleichen Brennweiten an; indessen ist aus Fig. 5 leicht ersichtlich, dass die Seiten der ähnlichen Dreiecke die Proportion

$$(p - f) : f = f' : (p' - f')$$

ergeben. Bei gegebenem Objecte in P wird der zugehörige Ort des Bildes P' gefunden, indem man durch P und H eine gerade Linie nach R zieht und durch R und H' dann eine zweite, welche die Axe in P' schneidet. Der einzige Fall, bei welchem die Construction auf den ersten Blick im Stich lassen könnte, wäre der, dass die Linie PR mit HH' zusammenfiele. Es wird indessen P' sofort gefunden, wenn man in H' dann ein Loth auf HH' errichtet, der Schnittpunkt desselben mit der Axe ist der gesuchte Punkt. Unbemerkt darf nicht bleiben, dass die letzte Construction nur für Punkte in der Axe zur Anwendung kommen kann.

II.

Aus dem Vorstehenden erklärt sich, dass im Allgemeinen der Ort des Bildes ein anderer ist, als der des Objectes. Aus einer genaueren Betrachtung der Fig. 5 ergibt sich indessen bereits, dass, wenn ein Object sich im Punkte S oder S' befindet, der zugehörige Bildpunkt ebendahin fällt. Die Symptose von Bild und Object näher zu beleuchten und die einschlägigen Bedingungen und Möglichkeiten ins Auge zu fassen, hat sich der Verfasser für den allgemeineren Fall ungleicher extremen Medien zur Aufgabe gestellt, um daraus die speciellen Fälle bei gleichen extremen

Medien abzuleiten, worüber die Resultate von Herr Prof. Listing bereits veröffentlicht sind [1]).

Sollen Bild und Object zusammenfallen, so müssen die conjugirten Vereinigungsweiten, welche im Sinne des durchgehenden Lichtes als positiv bezeichnet werden (p bis zum ersten Hauptpunkte, p' vom zweiten Hauptpunkte ab), entgegengesetzte Vorzeichen haben; und weil p' vom zweiten Hauptpunkte an gerechnet wird, ergibt sich, dass die eine Vereinigungsweite um das Interstitium grösser sein muss, als die andere.

Die Bedingung für die Symptose ist also

$$p' = -(p + \varepsilon).$$

Aus $(p-f)(p'-f') = ff'$ erhält man

für $p' = \frac{pf'}{p-f}$, woraus sich durch Combination beider Ausdrücke

$$-(p + \varepsilon) = \frac{pf'}{p-f} \text{ ergibt.}$$

Bezeichnet man den Werth von p, welcher dieser Bedingung genügt, mit s, so ist

$$s = -\tfrac{1}{2}(f'-f+\varepsilon) \pm \sqrt{\varepsilon f + \tfrac{1}{4}(f'-f+\varepsilon)^2}.$$

Wird $f = f'$, so erhält man hieraus für den speciellen Fall

$$s = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\varepsilon f + \frac{\varepsilon^2}{4}} \text{ oder}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\varepsilon\left(f + \frac{\varepsilon}{4}\right)}.$$

In beiden Fällen kann der Ausdruck unter der Wurzel sowohl positiv, als $= 0$, als auch negativ werden, so dass also im Allgemeinen zwei Symptosen, in besonderen Fällen jedoch auch eine, oder endlich gar keine vorhanden ist, wenn die Wurzel imaginär ist. Die Figur 5 zeigt diese

[1]) Ueber einige merkwürdige Punkte in Linsen und Linsensystemen.

Möglichkeiten bereits an, indem der Kreis von der Linie in zwei Punkten geschnitten oder in einem Punkte berührt werden kann oder endlich nichts mit der Linie gemeinschaftlich hat. Im Allgemeinen gibt es also

2 Symptosen, wenn $\varepsilon f + 1/4 (f' - f + \varepsilon)^2 > 0$
1 „ „ $\varepsilon f + 1/4 (f' - f + \varepsilon)^2 = 0$
0 „ „ $\varepsilon f + 1/4 (f' - f + \varepsilon)^2 < 0$

ist; für gleiche extreme Medien stellt sich die Bedingung einfacher und zwar gibt es

2 Symptosen, wenn $\varepsilon (f + \frac{\varepsilon}{4}) > 0$

1 „ „ $\varepsilon (f + \frac{\varepsilon}{4}) = 0$

0 „ „ $\varepsilon (f + \frac{\varepsilon}{4}) < 0$ ist.

Bei gegebenen Haupt- und Brennpunkten liefert die Construction Fig. 6 die symptotischen Punkte. Errichtet man im ersten Hauptpunkt ein Loth auf der Axe bis zum Durchschnitt T mit dem über $FE' = f + \varepsilon$ beschriebenen Halbkreise und ist U die Mitte zwischen E und D', welche Entfernung $= f' - f + \varepsilon$ ist, so entspricht die Linie UT der Wurzelgrösse und ist nur noch auf der Axe nach beiden Seiten hin abzutragen.

Für die Angabe genauerer Bedingungen und der einzelnen, dabei in Frage kommenden Fälle wird es zweckmässig sein, der Wurzelgrösse

$$= \sqrt{\varepsilon f + 1/4 (f' - f + \varepsilon)^2}$$

eine andere Form zu geben und zwar

$$= \sqrt{\left(\frac{f' - f}{2}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left(f' + f + \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Aus der letzteren Form ergibt sich besonders deutlich, dass die Wurzel in 2 Fällen rational werden kann. Für

$$\varepsilon = 0$$

wird die Wurzel $= \pm \frac{f' - f}{2}$ und man erhält für die Lage der Symptose die beiden Werthe

$$s = 0$$
$$= f - f' \cdot$$

Es wird nun $\varepsilon = 0$, wenn die beiden Hauptpunkte zusammenfallen, also entweder nur eine einzige brechende Fläche vorhanden ist, oder die Dicke der Linse vernachlässigt werden darf. In diesem Falle muss der Gegenstand im Scheitel der Linse oder im Knotenpunkt derselben (für eine brechende Fläche = dem Mittelpunkt derselben) liegen, wenn sein Bild mit ihm zusammenfallen soll.

Ebenfalls wird die Wurzel rational, wenn

$$f' + f + \frac{\varepsilon}{2} = 0 \text{ ist, d. h.}$$
$$\varepsilon = -2(f' + f).$$

Es wird dann $s = f' + f$ oder
$= 2f.$

Hat das Interstitium also ein anderes Vorzeichen, als die Brennweiten und ist es an Grösse der doppelten Summe derselben gleich, so sind die Punkte, welche zusammenfallen, die Nebenpunkte oder die Punkte, von denen vorhin nachgewiesen, dass einem Gegenstande im ersten ein eben so grosses umgekehrtes Bild im zweiten entspricht. Vergleicht man hiermit, was oben über die Vergrösserungszahl gesagt ist, so findet man für das Grössenverhältniss in der Symptose bei

$$\varepsilon = 0; \quad s = 0 \quad , \quad m = +1$$
$$s = f - f', \quad m = +\frac{f}{f'}$$
$$\varepsilon = -2(f' + f): \quad s = f + f', \quad m = -\frac{f}{f'}$$
$$s = 2f \quad , \quad m = -1,$$

welche Ausdrücke bereits an der betreffenden Stelle gedeutet sind.

Hat dagegen ε einen anderen Werth, so können verschiedene Fälle eintreten, je nach den positiven oder negativen Werthen von f', f und ε. Es ist dann zu unterscheiden, ob das Interstitium und die Brennweiten gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Im ersten Falle wird der zweite Ausdruck unter dem Wurzelzeichen dann immer positiv, die Wurzel reell und es sind somit immer zwei Symptosen vorhanden.

Im letzteren Falle ist der zweite Ausdruck in Rücksicht auf das Vorzeichen nur von der Grösse des Interstitiums abhängig und kann somit die ganze Wurzelgrösse reell, oder $= 0$, oder imaginär machen. Geht man von dem Falle aus, wo die Wurzel $= 0$ wird, so lassen sich darnach leicht die Bedingungen finden, unter welchen die Wurzel reell oder imaginär ist. Es wird aber der Ausdruck

$$\left(\frac{f'-f}{2}\right)^2+\frac{\varepsilon}{2}\left(f'+f+\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,$$

wenn an Grösse $f' \pm 2\sqrt{f'f} + f = \varepsilon$

d. h. $(\sqrt{f'} \pm \sqrt{f})^2 = \varepsilon$ ist,

dem Vorzeichen nach aber ε einerseits, f' und f andererseits ungleich sind. Nimmt man nun einen Werth an, welcher zwischen $f' + 2\sqrt{f'f} + f$ und $f' - 2\sqrt{f'f} + f$ liegt, so ergibt sich, dass die Wurzel imaginär wird und es stellen sich die Bedingungen für diesen Fall jetzt so:

1) $\varepsilon > f' + 2\sqrt{f'f} + f$ . . . 2 Symptosen

2) $\varepsilon = f' + 2\sqrt{f'f} + f$ . . . 1 Symptose

3) $\left\{\begin{array}{l}\varepsilon < f' + 2\sqrt{f'f} + f \\ \varepsilon = f' + f \quad \text{z. B.} \\ \varepsilon > f' - 2\sqrt{f'f} + f\end{array}\right\}$ . . . 0 „

4) $\varepsilon = f' - 2\sqrt{f'f} + f$ . . . 1 „

5) $\varepsilon < f - 2\sqrt{f'f} + f$ . . . 2 Symptosen.

Stellt man die Resultate noch einmal zusammen, um daraus dann den speciellen Fall für gleiche extreme Medien abzuleiten, so findet Symptose statt für

$$s = -\tfrac{1}{2}(f' - f + \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon f + \tfrac{1}{4}(f - f' + \varepsilon)^2}$$

und im speciellen Falle, wenn

$$s = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\varepsilon\,(f + \frac{\varepsilon}{4})} \quad \text{ist.}$$

I. Die Wurzel wird rational:

1) im allgem. Falle für $\varepsilon = 0$, $s = 0$ / $s = f - f'$ \ 2 Symptosen,

im besonderen „ $\varepsilon = 0$, $s = 0$] 1 Symptose;

2) im allg. F. für $\varepsilon = -2(f' + f)$, $s = f' + f$ / $s = 2f$ \ 2 Symptosen,

im besond. „ $\varepsilon = -4f$, $s = 2f$] 1 Symptose,

welche dann in der Mitte des Interstitiums liegt.

II. Haben Interstitium und Brennweiten gleiche Vorzeichen, so sind sowohl im allgemeinen als besonderen Falle immer 2 Symptosen vorhanden.

III. Wenn die Vorzeichen des Interstitiums und der Brennweiten ungleich sind, so finden im allgemeinen Falle die bereits angegebenen Bedingungen für zwei, eine oder keine Symptose statt. Es gestalten sich dieselben, wenn $f = f'$, folgendermassen:

1) $\varepsilon > 4f$ . . . 2 Symptosen,
2) $\varepsilon = 4f$ . . . 1 Symptose,
3) $\varepsilon \lesseqgtr \begin{matrix} 4f \\ 0 \end{matrix}$ . . . 0 „
4) $\varepsilon = 0$ . . . . 1 „ .

Es ist leicht einzusehen, dass wenn ε nun noch kleiner werden soll, es dann sein Vorzeichen ändern muss, und da es bereits das entgegengesetzte Vorzeichen der Brennweiten hat, so werden jetzt die Vorzeichen gleich: es finden in Folge dessen wieder zwei Symptosen statt, wie in II. bereits angegeben.

Als Beispiel für ungleiche extreme Medien und zwar als Beleg für den II. Fall mag das Auge angeführt werden. Bei dem von Prof. Listing angenommenen schematischen Auge sind: das Interstitium $\varepsilon = 0{,}3984^{mm}$,
die erste vordere Brennweite $f = 15{,}0072^{mm}$,
die zweite hintere „ $f' = 20{,}0746^{mm}$.

Es berechnen sich daraus die symptotischen Punkte für das Auge

$$s = + 0{,}9343^{mm},$$
$$= - 6{,}4001^{mm}.$$

Da nun der erste Hauptpunkt um eine Entfernung von $2{,}1746^{mm}$ hinter der Vorderfläche der Cornea liegt, so ist der erste symptotische Punkt um

$$2{,}1746 - 0{,}9343 = 1{,}2403^{mm}$$

und der zweite um $2{,}1746 + 6{,}4001 = 8{,}5747^{mm}$ hinter dem Scheitel des Auges zu suchen.

Als Beispiel für gleiche extreme Medien mag das zusammengesetzte Mikroskop dienen und zwar als Beleg für III, 1. Das ganze Mikroskop ist äquivalent einer Dispansivlinse, z. B. $f = - 0{,}5^{mm}$, $\varepsilon = + 200^{mm}$,
woraus man für die beiden Symptosen findet

$$s = - 0{,}50125^{mm}$$

und $= - 199{,}49875^{mm}$.

In gewissen Fällen, z. B. bei mikroskopischen Messungen mittelst des Objectmikrometers, ist es nicht unwichtig, die Vergrösserung-zahl bei der Symptose zu kennen. Es ist im Allgemeinen $m = - \frac{p' f}{p f'}$;

bei der Symptose ist aber

$$s = p = - 1/2 (f' - f + \varepsilon) + 1/2 \sqrt{4 \varepsilon f + (f' - f + \varepsilon)^2}$$
$$- p' = p + \varepsilon = - 1/2 (f' - f - \varepsilon) + 1/2 \sqrt{4 \varepsilon f + (f' - f + \varepsilon)^2};$$

andererseits ist auch

$$p = - 1/2 (f' - f + \varepsilon) - 1/2 \sqrt{4 \varepsilon f + (f' - f + \varepsilon)^2}$$
$$- p' = p + \varepsilon = - 1/2 (f' - f - \varepsilon) - 1/2 \sqrt{4 \varepsilon f + (f' - f + \varepsilon)^2},$$

woraus sich dann für die eine Symptose

$$m = \frac{f}{f'} \cdot \frac{-(f'-f-\varepsilon)+\sqrt{4\varepsilon f+(f'-f+\varepsilon)^2}}{-(f'-f+\varepsilon)+\sqrt{4\varepsilon f+(f'-f+\varepsilon)^2}}$$

und für die andere

$$m' = \frac{f}{f'} \cdot \frac{(f'-f-\varepsilon)+\sqrt{4\varepsilon f+(f'-f+\varepsilon)^2}}{(f'-f+\varepsilon)+\sqrt{4\varepsilon f+(f'-f+\varepsilon)^2}}$$

ergibt. Die Vergrösserungszahlen sind im Allgemeinen für die beiden Symptosen ungleich. Einfacher werden jene Ausdrücke in dem besonderen Falle $f = f'$. Es ist dann

$$m = \frac{\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon f+\varepsilon^2}}{-\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon f+\varepsilon^2}}$$

und

$$m' = \frac{-\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon f+\varepsilon^2}}{\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon f+\varepsilon^2}}$$

woraus ersichtlich, dass $m = \frac{1}{m'}$.

In der einen Symptose ist das Bild in demselben Masse vergrössert, wie es in der andern verkleinert wird. Für das zusammengesetzte Mikroskop, wie es vorhin besprochen, ist $m = -398$,
das umgekehrte Bild also 398 mal vergrössert.

III.

Der Verfasser knüpft als einen seines Wissens noch nicht behandelten Gegenstand folgende einschlägige Aufgabe an die vorliegende Abhandlung.

Zwischen dem Auge O (genauer dessen Knotenpunkt) und einem festen Gegenstande P befindet sich eine Linse oder ein Linsensystem in E, dem ersten Hauptpunkte. Das vom Auge wahrgenommene Bild ist angular m mal vergrössert oder verkleinert, deutlich oder undeutlich u. s. w. Es handelt sich um die Untersuchung des Zusammenhanges

zwischen der Vergrösserungszahl m und der Lage der Linse zwischen dem Auge und dem Gegenstande.

Als gegeben werden angenommen die dioptrischen Constanten der Linse, im Sinne des durchgehenden Lichtes $\pm \varepsilon$ und $\pm f$ in derselben Bedeutung wie oben; m sei positiv, wenn Bild und Object gleiche Lage zur Axe haben, negativ im anderen Falle. Die Entfernung des Gegenstandes P vom Auge, bezüglich vom Knotenpunkt desselben (8^{mm} hinter der Cornea) sei c, die Entfernung vom ersten Hauptpunkte p, die des Bildes hinter dem zweiten Hauptpunkte $+ q$, dann besteht zwischen diesen beiden letzteren Grössen die Beziehung $(p - f)(q - f) = f^2$

$$q = \frac{p f}{p - f}.$$

Nun verhält sich $- \frac{q}{p} = \frac{b}{g}$,

wenn die Grösse des Objectes $= g$, die des Bildes $= b$ ist.

Der Gesichtswinkel, unter welchem der Gegenstand erscheint, sei α; dann wird das Bild unter dem Winkel $m\alpha$ gesehen werden. Angenommen, g liegt symmetrisch zur Axe, so ist

$$\frac{g}{2c} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{b}{2BO} = \operatorname{tg} \frac{m\alpha}{2}.$$

Da aber einmal im Allgemeinen nur solche Gegenstände durch Linsen betrachtet werden, welche unter einem kleinen Gesichtswinkel erscheinen, andererseits von vorn herein zur Bedingung gemacht ist, dass die Lichtstrahlen nur kleine Winkel mit der Axe bilden, so ist es erlaubt, für die letzte Gleichung auch zu setzen

$$\frac{b}{2BO} = m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

woraus dann $\frac{b \cdot c}{g \cdot BO} = m$ folgt.

Da aber $\frac{b}{g} = -\frac{q}{p} = -\frac{f}{p-f}$ ist,

so wird $m = -\frac{cf}{BO\,(p-f)}$.

Es ist nun $BO = OE' - q$,

d. h. $BO = OE' - \frac{pf}{p-f}$,

also $BO\,(p-f) = OE'\,(p-f) - pf$;

bedenkt man jedoch, dass die ganze Entfernung

$$c = p + \varepsilon + OE' \text{ ist,}$$

so wird $BO\,(p-f) = (c-\varepsilon)\,(OE'-f) - OE'^2$,

somit $m = \frac{cf}{OE'^2 - (c-\varepsilon)\,(OE'-f)}$.

Aus diesem allgemeineren Falle lässt sich der besondere, wenn die Dicke der Linse gegen die Entfernung c verschwindend klein oder nur eine brechende Fläche vorhanden ist, dadurch ableiten, dass man das Interstitium $\varepsilon = 0$ setzt, d. h. die Hauptpunkte zusammenfallen lässt. Natürlich wird dann $OE' = OE$, und man erhält

$$m = \frac{cf}{OE^2 - c\,(OE-f)}.$$

Zunächst mag dieser Fall als der einfachere, bei Linsen gewöhnlich zur Anwendung kommende discutirt werden. Es sei $m = +1$, d. h. das erzeugte Bild hat dieselbe Lage und ist eben so gross, als das Object. Die Bestimmungsgleichung ergibt sich als

$$cf = OE^2 - c\,(OE-f)$$
$$c = OE\,(OE-c).$$

Dieser Gleichung wird unabhängig von f durch

$$OE = 0$$

und $OE = c$

entsprochen. Jede Linse, möge sie nun collectiv oder dispansiv sein, gibt ein eben so grosses aufrechtes Bild, wenn sie im Knotenpunkt des Auges oder auf dem Objecte selbst liegt.

Es wird von Interesse sein, zu betrachten, welche Veränderungen das Bild allmählich bei den aufeinander folgenden anderen Lagen erleidet. Für eine Collectivlinse ist die Brennweite $= +f$. Nun ist in dem Ausdruck

$$m = \frac{cf}{OE^2 - c(OE - f)}$$

nur der Nenner in Beziehung auf das Vorzeichen veränderlich. Da der Zähler immer positiv ist, so hängt von dem positiven Vorzeichen des Nenners die aufrechte, vom negativen die umgekehrte Lage des Bildes ab. Die Bedingungen, unter welchen der Nenner positiv oder negativ wird, ergeben sich am einfachsten aus dem Falle, wenn er $= 0$ ist. Dies tritt ein für

$$OE = \tfrac{1}{2}\left[c \pm \sqrt{c\,(c - 4f)}\right]$$

woraus folgt, dass der

Nenner		wenn
+ ,	OE	$> \tfrac{1}{2}\left[c + \sqrt{c\,(c-4f)}\right]$
− ,	OE	$< \tfrac{1}{2}\left[c + \sqrt{c\,(c-4f)}\right]$
		$> \tfrac{1}{2}\left[c - \sqrt{c\,(c-4f)}\right]$
+ ,	OE	$< \tfrac{1}{2}\left[c - \sqrt{c\,(c-4f)}\right]$ ist.

Die beiden Maxima für m treten ein, wenn der Nenner $= 0$ wird; derselbe wird ein Grösstes für $OE = \tfrac{1}{2}c$, mithin m ein Minimum; m wird ferner $= -1$, wenn

$$OE = \tfrac{1}{2}\left[c \pm \sqrt{c\,(c - 8f)}\right].$$

Die folgende Tabelle gibt eine Uebersicht über die vom Orte der Linse abhängige Grösse und Lage des Bildes. Es ist für

OE	$=$	0	,	m	$= +1$
„	$=$	$\tfrac{1}{2}\left[c - \sqrt{c\,(c-4f)}\right]$,	„	$=$	∞
„	$=$	$\tfrac{1}{2}\left[c - \sqrt{c\,(c-8f)}\right]$,	„	$=$	-1

$$OE = 1/2\ c \quad , \quad m = \frac{f}{f - \frac{c}{4}}$$

$$\text{„} = 1/2\,[c + \sqrt{c\,(c - 8f)}], \text{„} = -1$$

$$\text{„} = 1/2\,[c + \sqrt{c\,(c - 4f)}], \text{„} = \infty$$

$$\text{„} = c \quad , \text{„} = +1.$$

Für den Minimalwerth von m wird das Vorzeichen nur dann negativ, wenn $c > 4f$ ist; wäre $c < 4f$, so würde die Wurzelgrösse imaginär, eine Umkehrung des Bildes, welche eintritt, nachdem $m = \infty$ geworden, findet dann nicht statt.

Bei einer Dispansivlinse, bei welcher $-f$ zu nehmen ist, wird, da der Zähler in Folge dessen immer negativ ist, bei positivem Nenner ein umgekehrtes, bei negativem ein aufrechtes Bild entstehen. Der Nenner wird jetzt $= 0$, wenn

$$OE = 1/2\,[c \pm \sqrt{c\,c + 4f}]$$

ist, woraus leicht einzusehen, dass dies nur eintritt für Werthe von OE, welche grösser als $+ 3/2\ c$ oder kleiner als $- 1/2\ c$ sind. Im vorliegenden Falle liegen solche Werthe ausser dem Bereich der Möglichkeit, da OE nur zwischen 0 und c veränderlich sein kann. Der Nenner muss also immer negativ bleiben und erreicht seinen Maximalwerth für $OE = 1/2\ c$; das Bild ist in Folge dessen immer aufrecht und man erhält für

$$OE = 0 \quad , \quad m = +1$$

$$\text{„} = 1/2\ c \quad , \quad m = \frac{f}{f + \frac{c}{4}}$$

$$\text{„} = c \quad , \quad m = +1.$$

Bewegt man also eine Collectivlinse vom Auge weg in der Richtung eines Gegenstandes, so entsteht ein vergrössertes aufrechtes Bild, welches rasch wächst, bis es unendlich gross geworden, sich dann umkehrt und nun kleiner wird,

bis es am kleinsten erscheint, wenn die Linse sich in der Mitte zwischen Auge und Gegenstand befindet. Bei zunehmender Entfernung wächst das Bild, bis es unendlich gross geworden und nun als aufrechtes an Grösse so lange abnimmt, bis es bei Coincidenz von Linse und Gegenstand demselben congruent ist. Eine Dispansivlinse, in den Knotenpunkt des Auges gebracht, würde ein eben so grosses Bild erzeugen, wie das Object. Das aufrechte Bild bleibt ein solches, wird nur bei weiterer Entfernung vom Auge kleiner, bis es am kleinsten ist für die Lage in der Mitte zwischen Auge und Gegenstand. Bei noch grösserer Entfernung tritt dann das Umgekehrte ein, indem eine Zunahme von Bildgrösse stattfindet, bis Congruenz eintritt.

Eine weitere in Betracht kommende Frage ist nach der Deutlichkeit oder Undeutlichkeit des wahrgenommenen Bildes. Deutlich kann dasselbe nur dann sein, wenn es in einer Entfernung vom Auge liegt, für welche dasselbe sich zu accommodiren im Stande ist; undeutlich ist es, wenn der Abstand desselben vom Auge kleiner ist, als die kürzeste deutliche Sehweite δ, und besonders, wenn es hinter das Auge fallen würde.

Nun war aber OE der Abstand der Linse vom Auge, $+ q$ die Entfernung des Bildes hinter der Linse; $OE - q$ ist somit die Entfernung des Bildes vom Auge. Soll das Bild deutlich gesehen werden, so muss der letzte Ausdruck grösser oder gleich der kürzesten deutlichen Sehweite sein, welche indessen nach individuellen Eigenschaften beträchtlich differirt, z. B. beim kurzsichtigen Auge bedeutend kleiner ist, als beim weitsichtigen. Ist dagegen jener Ausdruck kleiner, als die kürzeste deutliche Sehweite, wohl gar negativ, (in welchem Falle das Bild hinter den Knotenpunkt des Auges fällt), so kann das Bild nur undeutlich sein. Es ist nun

$$q = \frac{pf}{p-f}$$

oder, da bei Vernachlässigung des Interstitiums

$$p = c - OE \text{ ist,}$$

$$q = \frac{(c - OE)f}{c - OE - f}.$$

Das Bild erscheint also deutlich, wenn

$$OE - \frac{(c - OE)f}{c - OE - f} \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} \delta$$

undeutlich, wenn

$$OE - \frac{(c - OE)f}{c - OE - f} \begin{matrix} < \\ = \\ < \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \delta \\ 0 \end{matrix} \right. \text{ ist.}$$

Aus obigem Ausdruck ergibt sich, dass bei einer Dispansivlinse ein undeutliches Bild nicht entstehen kann. Da bei einer solchen die Brennweite negativ ist, so wird der negative Bruch immer positiv; denn da $c - OE$ nie einen negativen Werth annehmen kann, so lange die Linse zwischen dem Auge und dem Gegenstande bleibt, so wird auch $c - OE - f$ aus dem angegebenen Grunde immer positiv sein. Das virtuelle Bild liegt also in grösserer Entfernung vom Auge, als die Linse. Eine Brille (Dispansivlinse, $f = -80^{mm}$) befindet sich in 20^{mm} Entfernung vom Knotenpunkt des Auges, c sei 260^{mm}; dann ist der Abstand des Bildes vom Knotenpunkt des Auges $= 80^{mm}$, eine Entfernuug, für welche ein stark kurzsichtiges Auge sich noch accommodiren kann. Bei einer Collectivlinse ist die für die Deutlichkeit des Bildes aufgestellte Bedingung in zweierlei Weise zu erreichen; entweder muss bereits $OE \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} \delta$ sein, oder der Bruch selbst muss negativ werden, damit der zweite Theil des Ausdruckes positiv werde. Der Zähler nun $(c - OE)f$ bleibt immer positiv, der Nenner muss also negativ werden, d. h. $c - OE < f$ sein, was bei Anwendung von Lupen immer statt hat, indem man

den Gegenstand, um ihn deutlich zu sehen, in eine geringere Entfernung von der Linse bringt, als die Brennweite derselben.

Darf dagegen die Dicke der Linse nicht vernachlässigt werden, oder hat man ein System von Linsen, bei welchem das Interstitium eine bedeutende Grösse hat, wie z. B. beim zusammengesetzten Mikroskop, so hat man sich an die bereits entwickelte Formel

$$m = \frac{c\,f}{OE'^2 - (c-\varepsilon)\,(OE' - f)}$$

zu halten, wobei dann OE' den Abstand des zweiten Hauptpunktes vom Knotenpunkt des Auges angibt. Nach der Grösse von OE', ε und f kann der Nenner wieder verschiedene Werthe annehmen und zwar in der Art, dass er positiv, $= 0$, oder negativ wird. Als Werth von OE', welcher den Nenner auf 0 reducirt, ergibt sich

$$OE' = \tfrac{1}{2}(c-\varepsilon) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(c-\varepsilon)\,(c-\varepsilon-4f)}$$

woraus folgt, dass der

Nenner		wenn
1) +	OE'	$> \tfrac{1}{2}\left[c-\varepsilon+\sqrt{(c-\varepsilon)\,(c-\varepsilon-4f)}\right]$
2) −	OE'	$< \tfrac{1}{2}\left[c-\varepsilon+\sqrt{(c-\varepsilon)\,(c-\varepsilon-4f)}\right]$ und $> \tfrac{1}{2}\left[c-\varepsilon-\sqrt{(c-\varepsilon)\,(c-\varepsilon-4f)}\right]$
3) +	OE'	$< \tfrac{1}{2}\left[c-\varepsilon-\sqrt{(c-\varepsilon)\,(c-\varepsilon-4f)}\right]$

ist.

Bei einem collectiven System erhält man also, wenn der Nenner positiv ist, wie im ersten und dritten Falle, ein aufrechtes Bild; dagegen ein umgekehrtes, wenn, wie im zweiten Falle, der Nenner negativ ist. Bei einem dispansiven System wird nur im ersten Falle der Nenner positiv, das Bild also ein umgekehrtes; der dritte Fall kann hier nicht in Betracht kommen, weil aus leicht einzusehenden Gründen OE' negativ wird, solche Werthe aber, wie bereits angegeben, nicht zulässig sind. Im zweiten Falle

dagegen erhält man bei negativem Nenner einen positiven Werth für m, also ein aufrechtes Bild.

Die Bedingung für die Deutlichkeit des Bildes ist wieder dieselbe, wie sie oben angegeben, nur dass

$$p = c - \varepsilon - OE' \text{ zu setzen ist,}$$

und man somit $OE' - \frac{(c-\varepsilon-OE')f}{(c-\varepsilon-OE'-f)} > \delta$ erhält,

in welchem Falle ein deutliches Bild wahrgenommen wird.

Was nun die extremen Werthe von m anbetrifft, so leuchtet ein, dass, im Falle der Nenner $= 0$ ist, für

$$OE' = 1/2\,[c-\varepsilon \pm \sqrt{(c-\varepsilon)\,(c-\varepsilon-4f)}],$$

$m = \infty$ wird, also das Maximum eintritt; dagegen für das Maximum des Nenners bei $OE' = 1/2\,(c-\varepsilon)$ ein Minimum von

$$m = -\frac{4cf}{(c-\varepsilon)\,(c-\varepsilon-4f)}.$$

Es wird ferner

$m = +1$ für $OE' = 1/2\,[c-\varepsilon \pm \sqrt{(c-\varepsilon)^2 + 4\varepsilon f}]$

$m = -1$ „ „ $= 1/2\,[c-\varepsilon \pm \sqrt{(c-\varepsilon)^2 - 4f(2c-\varepsilon)}]$.

Es mag in Beziehung auf Deutlichkeit und Vergrösserungszahl des Bildes das bereits mehrfach angeführte Mikroskop als Beispiel dienen. Die Entfernung des Tisches vom Auge sei $c = 250^{mm}$, die Linsensysteme desselben seien äquivalent einer Dispansivliuse von

$$f = -0{,}5^{mm} \text{ und } \varepsilon = +200^{mm}.$$

Setzt man $OE' = 50{,}50125^{mm}$,

so ergibt sich für $m = -398$

und für $OE' - q = 290^{mm}$,

welcher letztere Werth der Bedingung entspricht, dass er grösser als die deutliche Sehweite $= 250^{mm}$ ist.

Besonders mit Rücksicht auf das Mikroskop mag nicht unerwähnt bleiben, dass eine Aenderung von c mehr oder weniger irrelevant ist, weil bei demselben Linsensystem OE' sich ebensoviel ändert, und die in Folge dessen eingetretenen

Aenderungen sich aufheben. Es ist klar, dass also die Lage des Auges zum Ocular des Mikroskops nur einen äusserst geringen Einfluss auf die Deutlichkeit des Bildes hat, dass aber andererseits bei einer Aenderung von OE', welche durch p bedingt ist, ein bedeutender Unterschied für den in Frage kommenden Quotienten

$$\frac{p\,f}{p-f} = \frac{(c-\varepsilon-OE')\,f}{c-\varepsilon-OE'-f}$$ eintritt;

die geringste Aenderung in der Entfernung des Mikroskopkörpers vom Gegenstande wird also ein deutlich wahrgenommenes Bild undeutlich machen.

IV.

Im Vorangehenden kamen häufig die Werthe für f und ε vor; es mag folgende Methode zur Bestimmung dieser Grössen mittelst der Vergrösserungszahl hier nicht unerwähnt bleiben, da sie das Mittel an die Hand gibt, auf experimentellem Wege jene Constanten leicht zu bestimmen, welche bei der ganzen Abhandlung als bekannt vorausgesetzt werden.

Es seien für eine Linse oder ein Linsensystem E und E' die beiden Hauptpunkte, D sei ein messbarer oder greifbarer Punkt, z. B. der Scheitel; befindet sich dann in O ein Object von der Grösse A und in Q dessen Bild von der Grösse B, so ist nach den im Vorigen gebrauchten Bezeichnungen: $OE = p$ $QE' = q$
und es besteht dann die Beziehung, dass

$$f = \frac{p\,q}{p+q},$$

die Brennweite die harmonische Summe der conjugirten Vereinigungsweiten ist.

Nimmt man auf die Lage des Bildes keine Rücksicht, so ist

$$\frac{p}{q} = \frac{A}{B} = n$$

$$\frac{p-q}{q} = \frac{A-}{B}$$

und $$q = \frac{B}{A-B}(p-q)$$

ferner $$\frac{p}{p+q} = \frac{A}{A+B},$$

also $$f = \frac{pq}{p+q} = \frac{AB}{A^2-B^2}(p-q)$$

$$= \frac{n}{n^2-1}(p-q).$$

Hat man nun die Entfernuug des Bildes vom Gegenstande $OQ = c$, den Abstand des Gegenstandes vom Scheitel $OD = a$, sowie Grösse von Bild und Object gemessen, so dreht man das Linsensystem so um, dass die Hauptpunkte wieder zusammenfallen, damit p und q ungeändert bleiben. Als Criterium dafür mag man die Identität von n mit dem ersten Falle benutzen.

Der in erster Lage dem Gegenstande zugewandte Scheitel fällt jetzt nach D' und ist nun die Entfernung $OD' = b$ zu messen. Aus diesen Daten lässt sich f und ε mit einer in den meisten Fällen ausreichenden Genauigkeit bestimmen. — Zwischen den beiden Hauptpunkten, die beim Umkehren ihren Platz vertauscht haben, befindet sich in der Mitte ein Punkt C, den man mit mehr Recht als sonst den optischen Mittelpunkt nennen könnte, weil er beim Umlegen seinen Platz behält, und es ist klar, dass wenn man

$OC = e$ setzt,

$$e = OE + \frac{\varepsilon}{2} = p + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ist.}$$

Da nun andererseits dieser Ausdruck das arithmetische Mittel zwischen OD und OD',

also $2p + \varepsilon = a + b$

und $p + q + \varepsilon = c$ ist,

so ergibt sich für $p - q = a + b - c$,

und man hat $f = \frac{n}{n^2 - 1}(a + b - c)$

durch lauter bekannte Grössen ausgedrückt.

Von Wichtigkeit ist dann noch, zu wissen, wo die beiden Hauptpunkte liegen und wie gross ihr Abstand von einander ist.

Da $\frac{p + q}{p - q} = \frac{n + 1}{n - 1}$

also $p + q = \frac{n + 1}{n - 1}(a + b - c)$,

so ist $\varepsilon = c - (p+q) = c - \frac{n+1}{n-1}(a + b - c)$.

Der Abstand des ersten Hauptpunktes vom Scheitel ist $DE = p - a$, es ist aber

$$p + q = \frac{n + 1}{n - 1}(a + b - c)$$

$$p - q = (a + b - c)$$

also $p = \frac{n}{n - 1}(a + b - c)$

und $p - a = \frac{a - n(c - b)}{n - 1}$.

Die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte endlich ist $DF = f - DE$, wofür sich nach einer einfachen Umformung

$$DF = \frac{n^2(c - b) - a}{n^2 - 1}$$ ergibt.

Für den Tubus einer camera obscura, wie sie zu photographischen Zwecken dient, sei

$$n = 1{,}256$$

als Mittel von 4 Messungen.

$$a = 746{,}1^{mm},$$
$$b = 848{,}4^{mm},$$
$$c = 1431{,}5^{mm}.$$

Nach den oben entwickelten Formeln findet man daraus für

$$f = + 354{,}485^{mm}$$
$$\varepsilon = - 4{,}937^{mm}.$$

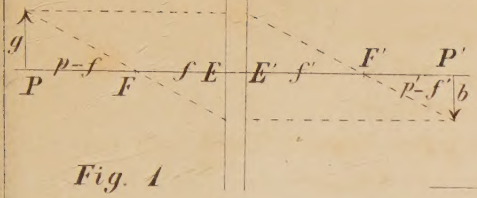

Fig. 1

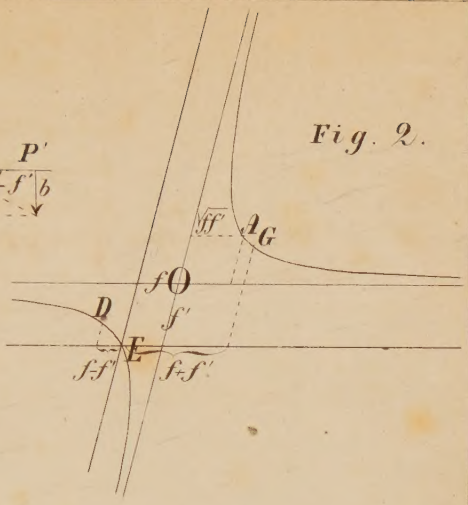

Fig. 2.

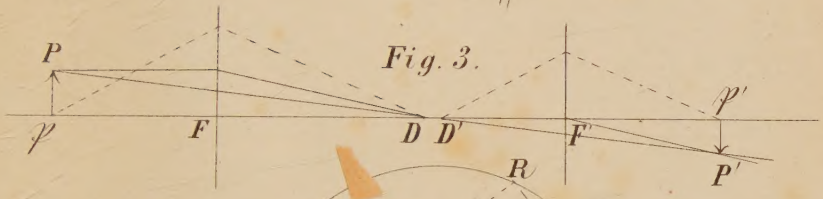

Fig. 3.

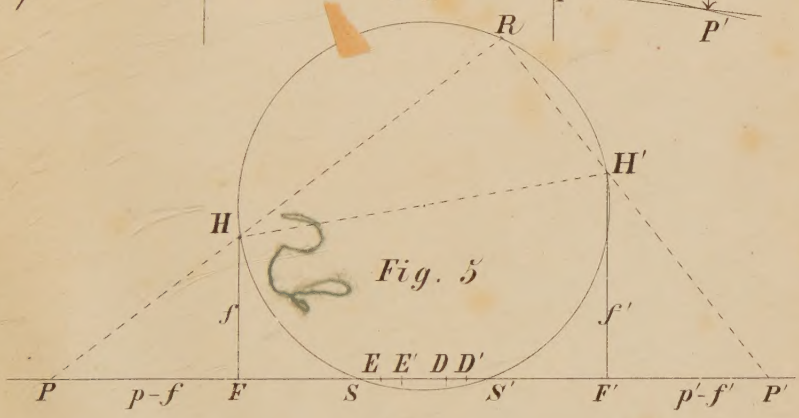

Fig. 5

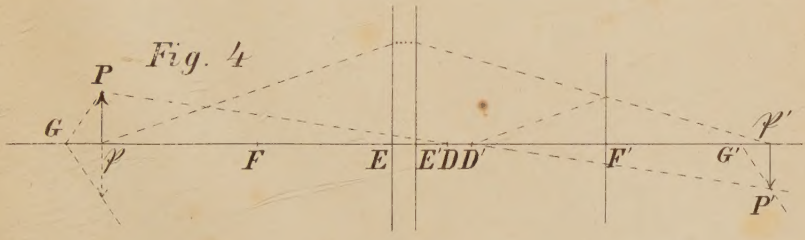

Fig. 4

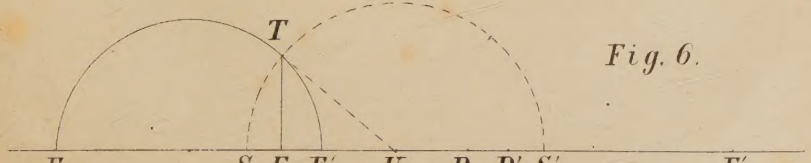

Fig. 6.